Fen-Edebiyat Fakültesi	**ARA SINAV KAĞIDI**	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz III	
İmza:	Sınav Tarihi: 20 Kasım 2021	

Her soru 25 puandır. Süre 90dk.

1. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx^2)}{nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$ dizisinin $x \in (0,1)$ aralığında (a)noktasal yakınsaklığını ve (b) düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm:

$$0 \leq \left|\frac{\sin(nx^2)}{nx^2}\right| \leq \frac{1}{nx^2}$$

$$x \neq 0 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{nx^2} = 0$$

Sıkıştırma teoremine göre

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

$$\left\| f_n - f \right\|_{(0,1)} \geq \left| f_n(1/\sqrt{n}) - f(1/\sqrt{n}) \right| = |\sin 1| \implies \lim_{n\to\infty} \left\| f_n - f \right\|_{(0,1)} \neq 0$$

Yakınsama düzgün olamaz.

2. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{9+n^4x^2}$ dizisinin $\mathbb{R}$ kümesinde (a)noktasal yakınsaklığını ve (b) düzgün yakınsaklığını inceleyin.

Çözüm: $f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$. $x \neq 0$ için,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2x/n^3}{9/n^4 + x^2} = 0$$

Yani noktasal limit fonksiyonu $f(x) = 0$ olur.

$$0 = \frac{d}{dx}(f_n(x) - f(x)) = f_n'(x) \implies 2n(9+n^4x^2) - 2nx \cdot n^4 2x$$

$$2n(9+n^4x^2 - 2n^4x^2) = 0$$

$$x^2 = \frac{9}{n^4} \implies x = \pm\frac{3}{n^2}$$

$$f_n'(x) \begin{cases} > 0, & -3/n^2 \leq x \leq 3/n^2 \\ < 0, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x)\right| = \max\left\{\lim_{x\to-\infty} \left|f_n(x)\right|, \lim_{x\to\infty} \left|f_n(x)\right|, \left|f_n(-3/n^2)\right|, \left|f_n(3/n^2)\right|\right\}$$

Supremum değer türevin sıfır olduğu yerlerde ($x = \pm 3/n^2$) ve uç noktalarda ($x = \pm\infty$) ortaya çıkabilir.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \left\{0, 0, \frac{1}{3n}\right\} = \frac{1}{3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f_n - f \right\|_{\mathbb{R}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n} = 0$$

Yani yakınsama düzgündür.

3. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,dx = 0$ olduğunu ispatlayın.

Çözüm: Bu soru sormak istediğimden daha kolay bir şekilde çözülüyordu :)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,dx = \lim_{n\to\infty} \left.\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\right|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 0$$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2+1}{n^3+e^x}$ fonksiyon serisi hangi $x \in \mathbb{R}$ değerleri için yakınsaktır?

Çözüm: $x = 0$ için seri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+e^x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Sağdaki seri yakınsak olduğundan ($p = 3$ serisi), soldaki seri de yakınsar.

$x \neq 0$ için limit karşılaştırma testini uygulayalım. $a_n = \frac{nx^2+1}{n^3+e^x}$ ve $b_n = \frac{1}{n^2}$ alırsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{n^3x^2+n^2}{n^3+e^x} = x^2 \neq 0$$

Yani $x \neq 0$ için bize verilen seri ile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisi aynı karakterlidir. İkinci seri yakınsak olduğundan ($p = 2$ serisi), orijinal seri de yakınsaktır.